Análisis I – Matemática I – Análisis II (C) – Análisis Matemático I (Q)
VERANO - 2014

Práctica 6:
Extremos

---

1. Sea $f(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$, calcular máximos y mínimos absolutos en el intervalo [-5,5]. Hacer un gráfico aproximado de la función.

2. La empresa Pejsi quiere fabricar "Narajsi", un nuevo producto sabor naranja que saldrá al mercado envasado en latitas de volumen V. ¿Cuál debe ser la relación entre el radio de la base y la altura de la lata para que Pejsi minimize el costo de aluminio?

3. (a) Calcular los extremos de $f(x,y) = x^2 + y^4$ y de $g(x,y) = x^4 + y^4$, y en dichos puntos sus hessianos.

   (b) Sea f de clase C^2 tal que tiene un extremo estricto en $a \in \mathbb{R}^n$, ¿es necesariamente $Hf(a)$ definida positiva o negativa?.

4. Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones y analizar cuáles son puntos de ensilladura:

   (a) $f(x,y) = x^2 - y^2$

   (b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x$

   (c) $f(x,y) = xy$

   (d) $f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2 y}} & \text{si} \quad xy \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad xy = 0 \end{cases}$

5. Sea $f(x,y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$. Probar que:

   (a) $(0,0)$ es un punto de ensilladura.

   (b) el determinante de la matriz $Hf(0,0)$ es cero.

   (c) f tiene un mínimo relativo en $(0,0)$ sobre cada recta que pase por $(0,0)$, es decir, si $g(t) = (at, bt)$ entonces $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un mínimo relativo en 0 para cada elección de a, b.

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

   (a) Probar que $(0,0)$ es un punto crítico pero no un extremo.

   (b) Probar que $\pm\sqrt{2}(1,-1)$ son mínimos absolutos. ¿Hay máximos relativos?

7. Para las siguientes funciones, encontrar los puntos críticos y analizar cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos de ensilladura.

   (a) $f(x,y) = (2x + 1 - y)^2$

   (b) $f(x,y) = x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y + 1$

(c) $f(x,y)=10x^2+10y^2+12xy+2x+6y+1$

(d) $f(x,y)=e^{1+x^2+y^2}$

(e) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+xy$

(f) $f(x,y)=(x-y)^2+1+2(x-y)$

(g) $f(x,y)=e^{x-y}(x^2-2y^2)$

(h) $f(x,y,z)=xy+z^2$

(i) $f(x,y,z)=2x^2+y^2+z^2-xy+2xz+z$

(j) $f(x,y)=x^2-2xy^2+y^4-y^5$

(k) $f(x)=\dfrac{1}{1+||x||^2},\ \ x\in\mathbb{R}^n$

8. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de clase C^2 tal que:

   - $f(0,1)=0$,
   - $\nabla f(0,1)=(0,2)$,
   - $Hf(0,1)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

   Si $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ está definida por $g(x,y)=3x^2y+e^{f(x,y)}-2y$,

   (a) Calcular $Hg(0,1)$.

   (b) ¿Tiene g un extremo relativo en $(0,1)$?.

9. Sea $f(x,y)=2x^4+y^2-3yx^2$.

   (a) Probar que el punto $(0,0)$ es punto crítico de f y calcular el hessiano en dicho punto.

   (b) Probar que f a lo largo de cualquier recta que pase por el origen tiene un mínimo en 0.

   (c) Muestre que el origen es punto silla de f y analice porqué esto no contradice al ítem anterior.
   Sugerencia: considere la curva $\alpha(t)=(t,\frac{3}{2}t^2)$.

10. Decidir si existen o no, números reales a y b tales que la función
$$f(x,y)=e^{y^4-x^2}+a(x-y)+b(x-2)(y-1)$$
tenga un mínimo relativo en el punto $(2,1)$.

11. Si el polinomio de Taylor de grado 2 de $f(x,y)$ en $(0,0)$ es
$$P(x,y)=1+2x-y+xy-x^2+y^2,$$
¿tiene
$$g(x,y):=f(x,y)-2x+y+x^2y$$
un mínimo local en $(0,0)$?

Extremos restringidos - Multiplicadores de Lagrange

12. Determinar los extremos absolutos de f restringida a A en los siguientes casos:
    (a) $f(x,y) = xy(x-y)^2 \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\}$
    (b) $f(x,y) = xy(x-y)^2 \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0\}$
    (c) $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, |x| \leq 3, |y| \leq 3\}$
    (d) $f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3 \quad A = \mathbb{R}^2$
    (e) $f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3 \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

13. Considerar el cuadrado de vértices $(-1,0), (1,0), (1,-2)$ y $(-1,-2)$, y la región A determinada por dicho cuadrado y su interior.

    Encontrar los extremos absolutos de la función $f(x,y) = 2x - y^2$ restringida al conjunto
    $$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 1\big\} \cap A.$$

14. (a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función
    $$f(x,y) = (y-1)^2 - x^3 + 3x^2 + 5.$$
    Hallar, justificando su existencia, el máximo y el mínimo valor que alcanza f en la región
    $$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 \leq y \leq 4\}.$$

    (b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función
    $$f(x,y) = x^2 + y^2 - x + \frac{1}{4}.$$
    Hallar, justificando su existencia, el máximo y el mínimo valor que alcanza f en la región
    $$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1; \ x + y \geq 0\}.$$

15. Encontrar el punto de la parábola $y^2 = 4x$ cuya distancia al $(1,0)$ es mínima,
    (a) utilizando multiplicadores de Lagrange.
    (b) reduciéndo el problema a una función de una variable.

16. Encontrar los máximos y mínimos de $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1$ en el borde y en el interior del círculo unitario.

17. Encontrar los máximos y mínimos de $f(x,y) = y + x - 2xy$ en el interior y en el borde de
    $$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, |x| \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

18. Encontrar los extremos de f sujetos a la restricción A:
   (a) $f(x,y,z) = x - y + z$ $\quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$
   (b) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$ $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 2y^2 = 1\}$
   (c) $f(x,y) = xy$ $\quad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \dfrac{|xy|}{|xy|+1} \leq 1\right\}$
   (d) $f(x,y) = \max\{x,y\}$ $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$
   (e) $f(x,y,z) = x + y + z$ $\quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - y^2 = 1, 2x + z = 1\}$
   (f) $f(x,y,z,w) = x + y - z - w$ $\quad A = \{(x,y,z,w) / x^2 + y^2 = 1 \text{ y } w = x + z\}$

19. Resolver los siguientes problemas geométricos mediante el método de Lagrange:

   (a) Encontrar la distancia más corta desde el punto $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ hasta el plano de ecuación $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$ donde $(b_1, b_2, b_3) \neq (0,0,0)$.
   (b) Encontrar el punto sobre la recta de intersección de los dos planos $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 = 0$ y $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$ que esté más cerca del origen.

   Mostrar que el volumen del mayor paralelepípedo rectangular que puede inscribirse en el elipsoide
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
   es $8abc/3\sqrt{3}$.

20. Encontrar la distancia mínima entre la parábola $y = x^2$ y la recta $x - y - 2 = 0$.

21. Encontrar el punto de la superficie $z = xy - 1$ más cercano al origen.

22. Probar que si α, β, γ son tres ángulos positivos tales que $\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$, entonces
$$\operatorname{sen}(\alpha)\ \operatorname{sen}(\beta)\ \operatorname{sen}(\gamma) \leq \frac{1}{8}$$

23. La temperatura de una placa en un punto cualquiera (x,y) viene dada por la función $T(x,y) = 25 + 4x^2 - 4xy + y^2$. Una alarma térmica, situada sobre los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, se dispara a temperaturas superiores a 180 grados o inferiores a 20 grados. ¿Se disparará la alarma?

24. Sea E el elipsoide definido por
$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 3x^2 + y^2 - 2xy + z^2 = 1\}.$$
   Encontrar el punto $p \in E$ más lejano al plano yz.

25. Encontrar los puntos del cono
$$z^2 = (y-2)^2 + (x-1)^2$$
   más cercanos al origen.

26. Encontrar los puntos más lejanos y los más cercanos al punto $(0, 0, 2)$ de la esfera de ecuación
$$x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1.$$

27. En una empresa se fabrican recipientes con forma de prisma rectangular con las siguientes características: la suma de todas sus aristas es de 30 metros y su superficie total es de 36 metros cuadrados. Determinar la capacidad máxima y mínima de estos recipientes.

    Sugerencia: El prisma rectangular es como una caja de zapatos gigante. Tener en cuenta la simetría de las variables en las fórmulas involucradas.